

INTEGRALES

INTEGRALES INMEDIATAS

$$\begin{aligned} \int a \, dx &= ax + C & \int e^x \, dx &= e^x + C & \int \operatorname{sen} x \, dx &= -\cos x + C \\ \int \frac{1}{x} \, dx &= \log x + C & \int a^x \, dx &= \frac{a^x}{\log a} + C & \int \frac{1}{1+x^2} \, dx &= \arctan x + C \\ \int x^p \, dx \quad (p \neq -1) &= \frac{x^{p+1}}{p+1} + C & \int \cos x \, dx &= \operatorname{sen} x + C & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \operatorname{arcsen} x + C \end{aligned}$$

TÉCNICAS GENERALES

TEOREMA DE CAMBIO DE VARIABLE

Sean f, g funciones reales de variable real. Supongamos que f, g' son funciones continuas. Entonces

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx = \int f(t) \, dt \quad \text{con } t = g(x).$$

INTEGRACIÓN POR PARTES

Sean f, g funciones reales de variable real derivables, entonces,

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx.$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea f una función trigonométrica (i.e. $f = f(\operatorname{sen} x, \cos x)$).

Para calcular la integral $\int f(\operatorname{sen} x, \cos x) \, dx$, se realizarán los cambios de variables:

- Si f es impar en el seno (i.e. $f(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$), $t = \cos x$.
- Si f es impar en el coseno (i.e. $f(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -f(\operatorname{sen} x, \cos x)$), $t = \operatorname{sen} x$.
- Si f es par en el seno y coseno (i.e. $f(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = f(\operatorname{sen} x, \cos x)$), $t = \tan x$.
- En el resto de casos, $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Entonces

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}.$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES

Sea f una función racional (i.e. $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ con p, q polinomios). Reduciremos la integral $\int f(x) dx$ en integrales del tipo

$$\int \frac{A}{(x-a)^n} dx, \quad \int \frac{Ax+B}{((x-r)^2+s^2)^n} dx \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

PASO 1.– Dividir $p(x)$ entre $q(x)$; ($p = q \cdot c + r$). Entonces $\int f(x) dx = \int \left(c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right) dx$.

Ahora el grado del numerador es menor que el del denominador.

PASO 2.– Reduce $\frac{r(x)}{q(x)}$ a suma de fracciones del tipo

$$\frac{A}{(x-a)^n} dx, \quad \frac{Ax+B}{((x-r)^2+s^2)^n} dx \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

PASO 3.– Las integrales de estas fracciones son

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{x-a} dx &= A \log|x-a| + C. \\ \int \frac{A}{(x-a)^n} dx &= \frac{-A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C. \\ \int \frac{Ax+B}{(x-r)^2+s^2} dx &= \frac{A}{2} \log|((x-r)^2+s^2)| + \frac{Ar+B}{s} \arctan\left(\frac{x-r}{s}\right) + C. \\ \int \frac{Ax+B}{((x-r)^2+s^2)^n} dx & \text{ cambio de variable } t = \frac{x-r}{s} \end{aligned}$$

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES IRRACIONALES

Sea f una función irracional (i.e. $f = f\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_r/n_r}\right)$).

Para calcular la integral $\int f(x) dx$, se realizará el cambio de variable:

$$t^\alpha = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con } \alpha = \text{mcm}(n_1, \dots, n_r).$$