DUALIDAD

Asociado a cada problema de programación lineal existe otro problema de programación lineal que se denomina problema dual. El problema dual aporta información importante acerca de la solución del problema original (en lo sucesivo, problema primal).

FORMA CANÓNICA DE DUALIDAD

Sea el problema

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{minimizar} & cx \\ & \text{sujeto a} & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

El problema dual se formula entonces como

$$\begin{array}{lll} \mathrm{D}: & \text{maximizar} & wb \\ & \text{sujeto a} & wA \leq c \\ & & w \geq 0 \end{array}$$

donde w es un vector fila con tantas componentes (variables duales) como restricciones tenga el problema primal.

FORMA ESTÁNDAR DE DUALIDAD

La formulación del problema dual para forma estándar se deduce fácilmente pasando a forma canónica el problema primal. Dado el problema

$$\begin{array}{lll} \mathrm{P}: & \text{minimizar} & cx \\ & \text{sujeto a} & Ax = b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

su problema dual se define como

$$\begin{array}{lll} \mathrm{D}: & \text{maximizar} & wb \\ & \text{sujeto a} & wA \leq c \\ & & w \text{ no restringido} \end{array}$$

Lema
El dual del dual es el primal.

FORMAS MIXTAS DE DUALIDAD

Para escribir el dual de un problema general, podemos escribir éste en forma canónica o estándar y aplicar una de las definiciones anteriores. Otra posibilidad es formular el dual utilizando las siguientes relaciones.

	minimización	$\Longleftrightarrow$	maximización	
variables	≥ 0	$\Longleftrightarrow$	$\geq$	restricciones
	≤ 0	$\Longleftrightarrow$	$\leq$	
	no restringida	$\Longleftrightarrow$	$=$	
restricciones	$\geq$	$\Longleftrightarrow$	≥ 0	variables
	$\leq$	$\Longleftrightarrow$	≤ 0	
	$=$	$\Longleftrightarrow$	no restringida	

Teorema de dualidad débil

Sean dos problemas recíprocamente duales en forma canónica:

$$\begin{array}{lll} \text{P}: & \text{minimizar} & cx \\ & \text{sujeto a} & Ax \geq b \\ & & x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{D}: & \text{maximizar} & wb \\ & \text{sujeto a} & wA \leq c \\ & & w \geq 0 \end{array}$$

Entonces, el valor de la función objetivo para cualquier solución factible x_0 del problema P, el valor de la función objetivo es mayor o igual que el de cualquier solución factible w_0 del problema D.
Es decir: $cx_0 \leq w_0 b$, siendo x_0, w_0 soluciones factibles de los problemas primal y dual.

Corolario
Si x_0 y w_0 son soluciones factibles de los problemas primal y dual y cumplen $cx_0 = w_0 b$, entonces x_0 y w_0 son óptimas en sus respectivos problemas.

Teorema de dualidad fuerte
Si uno de los problemas primal o dual tiene solución óptima, entonces ambos problemas tienen solución óptima y sus valores objetivos óptimos coinciden.

Teorema fundamental de dualidad
Dados dos problemas recíprocamente duales se cumple una y slo una de las siguientes situaciones:

1. Ambos tienen soluciones óptimas.
2. Uno de los problemas tiene solución no acotada y el otro no tiene solución factible.
3. Ambos problemas son no factibles.

Teorema de holgura complementaria
Sean x_0 y w_0 soluciones factibles de los problemas primal y dual en forma canónica. x_0 y w_o son soluciones óptimas si y sólo si

$$\begin{array}{rl} (c_j - w_0 a_j)x_{0j} = 0 & j = 1, \ldots, n \\ w_{0i}(a^i x_0 - b_i) = 0 & i = 1, \ldots, m \end{array}$$

donde a_j es la columna j-ésima y a^i es la fila i-ésima de la matriz A.

Corolario
Si x_0 y w_0 son soluciones óptimas de sus respectivos problemas, se tienen las siguientes implicaciones:

$$\begin{array}{ccc} x_{0j} > 0 & \Longrightarrow & w_0 a_j = c_j \\ a^i x_0 > b_i & \Longrightarrow & w_{0i} = 0 \\ w_{0i} > 0 & \Longrightarrow & a^i x_0 = b_i \\ w_0 a_j < c_j & \Longrightarrow & x_{0j} = 0 \end{array}$$