



1. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en \mathbb{R} . Hallar en función de f' las derivadas de

$$g(x) = f(x + f(a)); \quad g(x) = f(x \cdot f(a)); \quad g(x) = f(x + f(x)); \quad g(x) = f(x^2)$$

2. Estudiar la derivabilidad de las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} a) f(x) &= E[x] & b) f(x) &= \frac{1}{2}x|x| & c) f(x) &= \begin{cases} xe^{\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \\ d) f(x) &= \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{I} \end{cases} & e) f(x) &= \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}x}{1 + e^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} & f) f(x) &= \frac{1}{1 + |x|} \end{aligned}$$

3. Determinar los puntos de la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$ en los que la tangente forma ángulos iguales con los ejes de coordenadas.
4. Se considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| > c \\ ax^2 + b & |x| \leq c \end{cases}$$

Hallar en función de c los valores de a y b para que la función sea derivable en c .

5. Si $f(x) = 2 + x^3(x-2)^2$ probar que la ecuación $f'(x) = 0$ posee al menos una raíz en $(0,2)$ sin calcular su derivada.
6. Demostrar que la ecuación $x^3 - 4x - 2 = 0$ no puede tener dos raíces reales distintas en el intervalo $(2,3)$.
7. Estudiar la continuidad y derivabilidad de las funciones

$$\begin{aligned} a) f(x) &= \begin{cases} \operatorname{sen} px & x < -1 \\ 2 + x^2 & -1 \leq x < 0 \\ 1 + e^{-x} & x \geq 0 \end{cases} & c) f(x) &= \begin{cases} \frac{x \operatorname{Ln} x}{x-1} & x \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \\ 1 & x = 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \\ b) f(x) &= \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases} & d) f(x) &= \begin{cases} e^x - 1 & x \leq 0 \\ x^3 & x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

8. Aplicando el teorema de Lagrange, hallar $\operatorname{Ln} 101$ sabiendo que $\operatorname{Ln} 100 = 4,6052$ y hallar también una cota superior del error.
9. Demostrar, aplicando el teorema del valor medio que la siguiente serie armónica no está acotada

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$



10. Úsese el teorema del valor medio para demostrar:

$$a) \sqrt{1+h} < 1 + \frac{1}{2}h \quad \forall h \in \mathbb{R} / h > 0$$

$$b) \frac{b-a}{1+b^2} < \arctg b - \arctg a < \frac{b-a}{1+a^2} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } 0 < a < b$$

$$c) \frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tga}}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} / 0 < a < b < \frac{\pi}{2}$$

$$d) \frac{b-a}{b} < \operatorname{Ln} \frac{b}{a} < \frac{b-a}{a} \quad \forall a, b \in \mathbb{R} / 0 < a < b$$

11. Demostrar, aplicando el teorema de Lagrange, que

$$a) \frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}$$

$$b) 9 - \frac{1}{16} < \sqrt{80} < 9 - \frac{1}{18}$$

$$c) \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{15} < \operatorname{arcsen} 0,6 < \frac{\pi}{6} + \frac{1}{8}$$

12. Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que para todo $x \in (0, 2) / |f'(x)| < 5$. Demostrar que si $f(0) = 1$, entonces $|f(2)| < 11$.

13. Calcular los siguientes límites

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} x(5^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{Ln} x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x} \right)^{2x}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{Ln}(1+x)} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \operatorname{sen} x)^{\frac{1}{x}}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{Ln} x \frac{1+x}{x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\operatorname{sen} x}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a^x - b^x}{x}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arcsen} x}{\operatorname{sen}^3 x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x - \frac{3}{2} \operatorname{sen} 2x}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\cot g^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$o) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{\cos x} \right)$$

$$p) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$q) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{e}{e^x - 1} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$r) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Ln}(2x^2 - 1)}{\operatorname{tg}(x-1)}$$

$$s) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{xe^{2x} - e^{2x} - x + 1}{e^{2x} - 1} \right)$$

$$t) \lim_{x \rightarrow 0} x^{-4} (\sqrt{2 \cos x^2} - \sqrt{2})$$

$$u) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\operatorname{Ln} x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$v) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} nx - n \operatorname{tg} x}{n \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} nx} \quad n \neq 0$$



14. Hallar los polinomios de Taylor, del grado indicado y en el punto indicado, de las siguientes funciones

a) $f(x) = e^{e^x}$ grado 3 en 0

b) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ grado 3 en 0

c) $f(x) = \operatorname{sen} x$ grado $2n+1$ en $\frac{p}{2}$

d) $f(x) = \cos x$ grado $2n$ en p

e) $f(x) = e^x$ grado n en 1

f) $f(x) = x^5 + x^3 + x$ grado 4 en 0

g) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ grado $2n+1$ en 0

h) $f(x) = \frac{1}{1+x}$ grado n en 0

15. Escribir los siguientes polinomios en x como polinomios en $(x-3)$

a) $x^2 + 4x - 9$

b) x^5

c) $x^2 + bx + c$

16. Hallar el desarrollo de Taylor de las siguientes funciones en potencias de los binomios que se indican

a) $f(x) = \cos x$ para $x - \frac{p}{2}$

b) $f(x) = \operatorname{Ln} x$ para $x - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x - 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x + 1$

e) $f(x) = \sqrt{x}$ para $x - 4$

17. Calcular los siguientes números con un error menor al indicado

a) $\operatorname{sen} 0,1$ error $< 10^{-5}$

b) $\operatorname{Ln} 1,2$ error $< 10^{-3}$

c) $e^{0,3}$ error $< 10^{-4}$

18. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Calcular a , b , c y d , sabiendo que tiene un máximo en el punto A $(-1, 1)$ y un mínimo en B $(2, -2)$.

19. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 1}{x - 1} & x < 0 \\ \frac{ax + b}{x^2 + 2x + 1} & x \geq 0 \end{cases}$$



- a) Hallar los valores a y b sabiendo que f es continua en $x = 0$ y que tiene un máximo en el punto $x = 2$.
- b) Con estos valores de a y b ¿es f derivable en todo R ?
- c) Hallar las asíntotas de dicha curva.
20. Estudiar los extremos de la función $f(x) = (x-3)^5 + 6$.
21. Descomponer el número 45 en dos sumandos tales que la suma del doble del cuadrado del primero, mas siete veces el cuadrado del segundo sea mínima.
22. Sobre un segmento \overline{AB} de longitud a , se considera un punto variable x . Hallar el valor del segmento \overline{AX} en función de a para que el área de los triángulos equiláteros de lado \overline{AX} y \overline{XB} , sumada, sea mínima.
23. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,2)$ y forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima situado en el primer cuadrante.
24. En un triángulo rectángulo de catetos b y c se inscribe un rectángulo de forma que uno de sus vértices coincide con el ángulo recto. Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima.
25. Entre todos los triángulos isósceles con una longitud constante como perímetro, hallar el de área máxima.
26. Un jardinero ha de construir un parterre de forma de sector circular de un perímetro de 20 m. ¿Cuál será el radio que dará el parterre de área máxima?
27. Una ventana normada se forma sustituyendo el lado superior de un marco rectangular por un semicírculo. Dado el perímetro de la ventana, hallar sus dimensiones para que el flujo de luz a través sea máximo.
28. Determinar los parámetros a, b, c, d de modo que la curva dado por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en $I(-2, 6)$ con tangente en dicho punto paralela a la recta $8x + y + 10 = 0$ y que pasa por el punto $A(0, -2)$.
29. Entre todas las ventanas que tienen la misma luz: 1 m^2 hallar aquella cuyo marco sea de coste mínimo.
30. Demostrar que los puntos de inflexión de $y = (x-a)/(x^2 + a^2)$ están situados en una recta. Hallar su ecuación.
31. ¿Para qué valores de a y b , el punto $A(1, 3)$ es punto de inflexión de la curva dada por $f(x) = ax^3 + bx^2$?
32. Demostrar que los puntos de inflexión de la curva $f(x) = (\text{sen } x)/x$ pertenecen a la curva $y^2(4 + x^4) = 4$.
33. Representar las siguientes gráficas:

$$a) y = 3x^4 + 4x^3$$

$$b) y = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$c) y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$$

$$d) y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$$

$$e) y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

$$f) y = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$g) y = x^3 \sqrt{4 - x^2}$$

$$h) y = 3 \text{sen}(x - 2)$$

$$i) y = \frac{4}{x} - \frac{1}{\cos x}$$

$$j) y = e^{-|x|}$$

$$k) y = e^{\frac{-1}{x^2}}$$

$$l) y = \text{arctg}(3x - x^3)$$

$$m) y = \text{Ln}(x^2 - x)$$

$$n) y = \text{Ln} \frac{1 + |x|}{|x|}$$

$$o) y = x \text{Ln} x^2 - x^2$$

$$p) y = \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

$$q) y = 1 + ax^2 + x^4$$

$$r) y = \frac{a}{x^2} + \frac{1}{x}$$