



1. Sea  $V$  el espacio vectorial de todos los polinomios. Demuestra que el vector  $P(x)=x+1$  se expresa como combinación lineal de los vectores del sistema  $S=\{1-x^2, x+x^2\}$ .
2. Sea  $C$  el espacio vectorial de los números complejos. Demuestra que el vector  $-4+7i$  se expresa como combinación lineal de los vectores del sistema  $S=\{1+2i, 2-i\}$ .
3. Sea  $V$  el espacio vectorial de todos los polinomios. Demuestra que el vector  $P(x)=x^3-x$  no se puede expresar como combinación lineal de los vectores del sistema  $S=\{x^2+x+1, x^3-1\}$ .
4. Hallar las coordenadas del vector  $-3+7i$  respecto de la base  $B=(1+i, 1-i)$ .
5. Hallar las coordenadas del vector  $2\bar{u}-5\bar{v}$  respecto de la base  $B=(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3)$  sabiendo que  $\bar{u}=-3\bar{u}_1+2\bar{u}_2+4\bar{u}_3$  y  $\bar{v}=-3\bar{u}_2+2\bar{u}_3$ .
6. Hallar las fórmulas del cambio de base, siendo  $\bar{u}_1=\bar{v}_1-\bar{v}_2$  y  $\bar{u}_2=3\bar{v}_1-5\bar{v}_2$ . ¿Cuáles son las coordenadas del vector  $\bar{u}$  respecto de la base  $B'=(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ , si respecto de la base  $B=(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  son  $(2, -1)$ ? ¿Cuáles son las coordenadas del vector  $\bar{u}$  respecto de la base  $B$  si respecto de la base  $B'$  son  $(2, 6)$ ?
7. Hallar las fórmulas del cambio de base siendo  $\bar{u}_1=3\bar{v}_1-2\bar{v}_2$  y  $\bar{u}_2=-5\bar{v}_1-\bar{v}_2$ . ¿Cuáles son las coordenadas del vector  $\bar{u}$  respecto de la base  $B'=(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$  si respecto de la base  $B=(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ , son  $(4, 3)$ ? ¿Cuáles son las coordenadas del vector  $\bar{u}$  respecto de la base  $B$  si respecto de la base  $B'$ .
8. Expresar  $\bar{v}=(1, -2, 5)$  en  $\mathbb{R}^3$  como combinación lineal de los vectores  $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$  siendo  $\bar{u}_1=(1, -3, 2), \bar{u}_2=(2, -4, -1), \bar{u}_3=(1, -5, 7)$ .
9. Determinar si los siguientes vectores en  $\mathbb{R}^3$  son o no linealmente dependientes:  $\bar{u}=(1, -2, 1), \bar{v}=(2, 1, -1), \bar{w}=(7, -4, 1)$ .
10. Demostrar que en  $\mathbb{R}^3$  los vectores  $\bar{u}=(2, 1, -5), \bar{v}=(1, -4, 2)$  y  $\bar{w}=(1, 2, -4)$  forman un sistema linealmente dependiente.
11. Determinar si  $(1, 1, 1), (1, 2, 3)$  y  $(2, -1, 1)$  constituyen una base del espacio vectorial  $\mathbb{R}^3$ .
12. Considérese la base  $S=\{\bar{u}_1=(1, 2, 0), \bar{u}_2=(1, 3, 2), \bar{u}_3=(0, 1, 3)\}$  de  $\mathbb{R}^3$ . Hallar:
  - a) Ecuaciones de cambio de base desde la canónica  $E=\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$  de  $\mathbb{R}^3$  hasta la base  $S$ .
  - b) Ecuaciones de cambio de base desde la base anterior  $S$  regresando hasta la base usual  $E$  de  $\mathbb{R}^3$ .
13. Sea  $R=\{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  un sistema de referencia del espacio afín  $A^2$ , en esta referencia se dan los puntos  $A=(1, -1), B=(-2, 1)$ , los vectores  $\bar{u}_1=(1, 1), \bar{u}_2=(-1, 1)$  y la recta  $r: x_1+x_2=3$ . Hallar:
  - a) Las coordenadas de  $B$  con respecto al sistema de referencia  $R'=\{A; \bar{u}_1, \bar{u}_2\}$ .
  - b) La ecuación de  $r$  respecto de la referencia  $R'$ .



14. Fijado un sistema de referencia  $R$  en  $A^3$  se dan las coordenadas en  $R$  de otras dos referencias  $S = \{(1,0,1); (2,0,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$ ,  $S' = \{(2,0,-1); (1,0-1), (0,1,0), (0,0,-1)\}$  de  $A^3$ :
- Obtener las ecuaciones del cambio de sistema de referencia de  $S$  a  $S'$ .
  - Si denotamos por  $(x, y, z)$  las coordenadas de los puntos con respecto a  $S$ , obtener las ecuaciones del plano  $x + y - 2z = 1$  en la referencia  $S'$ .
15. Dados los vectores  $\vec{u} = (2, -3, 5)$  y  $\vec{v} = (6, -1, 0)$ , hallar:
- Los módulos de  $\vec{u}$  y de  $\vec{v}$ .
  - El producto escalar de  $\vec{u}$  y de  $\vec{v}$ .
  - El coseno del ángulo que forman.
  - La proyección del vector  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ .
  - La proyección del vector  $\vec{v}$  sobre  $\vec{u}$ .
  - El valor de  $m$  para que el vector  $(m, 2, 3)$  sea ortogonal a  $\vec{u}$ .
16. Dados los vectores  $\vec{u} = (3, 1, -1)$  y  $\vec{v} = (2, 3, 4)$ , hallar:
- Los módulos de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
  - El producto vectorial de  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
  - Un vector unitario ortogonal a  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
  - El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ .
17. Hallar un vector perpendicular a  $\vec{u} = (2, 3, 4)$  y  $\vec{v} = (-1, 3, -5)$ , y que sea unitario.
18. Sea  $B = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  una base tal que  $|\vec{u}_1| = |\vec{u}_2| = |\vec{u}_3| = 2$  y  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = (\vec{u}_1, \vec{u}_3) = (\vec{u}_2, \vec{u}_3) = 60^\circ$ .  
Calcular el módulo del vector  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ .
19. Hallar la ecuación de la recta que tiene la misma ordenada en el origen que la recta  $2x - 3y + 6 = 0$  y cuyo vector normal es  $\vec{n} = (1, 2)$ .
20. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento  $\overline{AB}$  donde  $A(1, 3)$  y  $B(5, -1)$ .
21. La recta  $4x - 3y = 12$  es mediatriz de un segmento  $\overline{AB}$ . Sabiendo que las coordenadas de  $A$  son  $(1, 0)$ , hallar las de  $B$ .
22. Por el punto  $A(2, 6)$  se trazan dos rectas perpendiculares a las bisectrices del primer cuadrante y del segundo cuadrante. Hallar: 1º Las ecuaciones de dichas rectas. 2º Las coordenadas de los otros vértices del triángulo formado por la recta  $3x - 13y - 8 = 0$  con dichas rectas.
23. Determinar el valor de  $a$  para que las rectas  $ax + (a-1)y - 2(a+2) = 0$  y  $3ax - (3a+1)y - (5a+4) = 0$  sean: 1º Paralelas. 2º Perpendiculares.
24. Dados los puntos  $A(2, 1)$ ,  $B(-3, 5)$  y  $C(4, m)$ , calcular  $m$  para que el triángulo  $ABC$  tenga de área 6.



25. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta  $x = 2t, y = 3 + t, z = 1 - t$ , y por el punto  $A(2, -1, 2)$ .

26. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $A = (2, 0, 1)$  y contiene a la recta de ecuación:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$$

27. Hallar la ecuación de un plano definido por el punto  $(1, 0, -1)$  y la recta dada paramétricamente por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4t \\ -3+2t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

28. Hallar la ecuación del plano  $\mathbf{p}$  que pasa por el punto  $A(1, 1, 1)$  y es perpendicular a la recta  $r: x = t, y = 0, z = t$ .

29. Calcular el ángulo formado por las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

30. Hallar la distancia del punto  $Q(5, 5, 3)$  al plano  $\mathbf{p}: (x, y, z) = (0, 0, 4) + t(2, 2, -1) + s(-3, 2, 0)$

31. Encontrar la distancia del punto  $A(1, 2, 1)$  a la recta  $s: \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$

32. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(2, -1, 5)$  y es paralela a los planos

$$\mathbf{a}: x - 3y + z = 0$$

$$\mathbf{b}: 2x - y + 3z - 5 = 0$$

33. Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos  $A(2, 2, -1)$  y  $B(4, 0, 2)$  y es perpendicular al plano  $\mathbf{a}: x - 5y + 2z - 6 = 0$ .

34. Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto  $A(1, 0, -1)$ , es perpendicular al plano  $\mathbf{a}: x - y + 2z + 1 = 0$  y, además, es paralelo a la recta  $r: \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ .

35. Obtener la ecuación de un plano que contenga a la recta  $r$  y sea perpendicular al plano  $\mathbf{p}$ ,

$$\text{siendo: } r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+1}{-1} \quad \mathbf{p}: \begin{cases} x = t - s \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$



36. Dadas las rectas

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1} \quad s: \frac{x}{-3} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{2}$$

- Hallar la ecuación general del plano  $\mathbf{p}$  que contiene a  $r$  y es paralelo a  $s$ .
- Determinar la distancia de  $s$  al plano  $\mathbf{p}$ .

37. Calcular el volumen del tetraedro determinado por los ejes coordenados y el plano  $\mathbf{a}: 6x - 5y + 3z - 3 = 0$ .

38. Dadas las rectas de ecuaciones  $r: \frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z - 2}{2}$ ,  $s: (x, y, z) = (2, 0, 1) + t(1, 1, -2)$

- Estudiar su posición relativa en el espacio.
- Calcular la distancia entre ellas.
- Trazar una recta que corte perpendicularmente a ambas.

39. Sabiendo que dos lados de un cuadrado están en las rectas

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1} \quad s: \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x - y - z = -4 \end{cases} \quad \text{calcular su área.}$$

40. Hallar el punto simétrico de  $P(1, 2, 3)$  respecto del plano  $\mathbf{a}: x - 3y - 2z + 4 = 0$ .

41. Obtener las coordenadas del punto simétrico del  $P(1, -3, 7)$  respecto de la recta

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-4}{3}.$$

42. Hallar los valores de  $m$  y  $n$  para que las rectas siguientes sean paralelas:

$$r: \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases} \quad s: \frac{x}{m} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+3}{n}$$

43. Dadas las rectas  $r: \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$   $s: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - 5y - z - 9 = 0 \end{cases}$

- Estudiar su posición relativa.
- Determinar las ecuaciones del plano que las contiene.

44. Hallar los valores del parámetro  $k$  para que los 3 planos  $\begin{cases} \mathbf{a}: x + y + kz = 1 \\ \mathbf{b}: kx + y + z = 1 \\ \mathbf{g}: 2x + y + z = k \end{cases}$  tengan una recta

en común. Hallar también el vector de dirección de dicha recta.



45. Dados los planos de ecuaciones 
$$\begin{cases} \mathbf{a} : ax - 2z = 15 \\ \mathbf{b} : 2x + y + z = -7 \\ \mathbf{g} : x + y + az = -8a \end{cases}$$

- Determinar los valores de  $a$  para que los tres planos pasen por una recta.
- En este caso, determinar dos puntos de esta recta y el vector de dirección.

46. Discutir, según los valores del parámetro  $a$ , la posición relativa del plano y recta siguientes:

$$\mathbf{a} : 2x + 3y - 2z = 4 \quad r : \begin{cases} ax - y + z = 2 \\ 6x + 5y - 3z = a \end{cases}$$

47. Determinar  $a$  para que las rectas  $r : \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$  y  $s : \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{cases}$  estén situadas en un mismo plano.

48. Dados el plano  $\mathbf{p} : x + y + mz = n$ , y la recta  $r : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$

- Calcular  $m$  y  $n$  para que  $\mathbf{p}$  y  $r$  sean secantes.
- Calcular  $m$  y  $n$  para que  $\mathbf{p}$  y  $r$  sean paralelos.
- Calcular  $m$  y  $n$  para que  $\mathbf{p}$  y contenga a  $r$ .