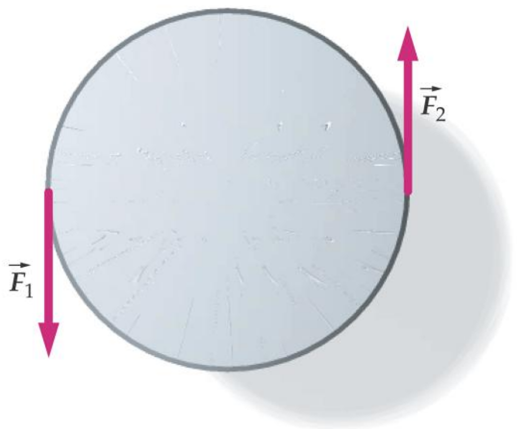
Módulo 1: Mecánica
Sólido rígido. Rotación (II)

Segunda ley de Newton en la rotación

- Se puede hacer girar un disco por ejemplo aplicando un par de fuerzas.
- Pero es necesario tener en cuenta el punto de aplicación.

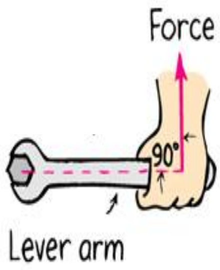


Momento de una fuerza

Cuando una fuerza provoca una rotación la llamamos **torque, momento de torsión o momento de una fuerza**.

El momento τ de una fuerza F depende de:

- La magnitud de la fuerza F
- La dirección de la fuerza
- La distancia r entre la fuerza aplicada y el eje de rotación (también se le llama brazo de palanca o *lever arm*)

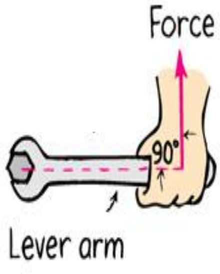


Momento de una fuerza

El momento o torque τ de una fuerza F es:

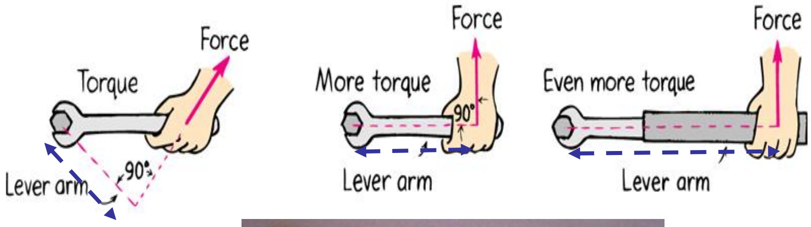
siendo θ el ángulo que forman F y r.

Si son perpendiculares, es sencillamente el producto de F por r.



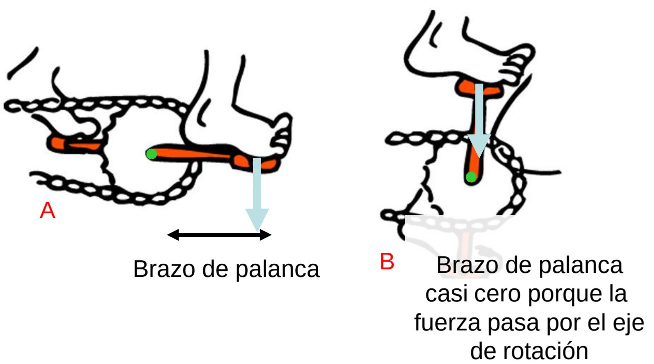
Brazo de palanca

El brazo de palanca (lever arm) r es la distancia perpendicular desde el eje de rotación a la dirección de la fuerza



Cuestiones sencillas

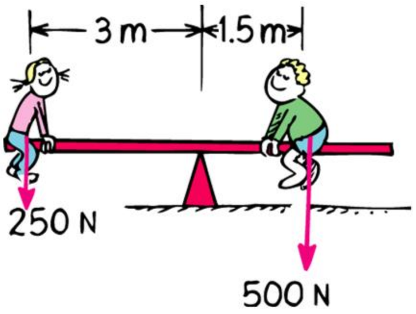
¿En qué caso se ejerce un mayor torque?

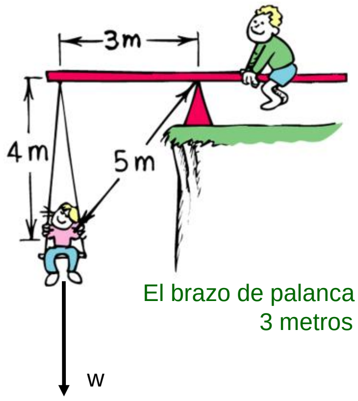


Equilibrio de torques

Diferentes situaciones de equilibrio en relación con los momentos de torsión o torques:

(250 N) x (3 m) = (500 N) x (1.5 m)





El brazo de palanca de ella es 3 metros

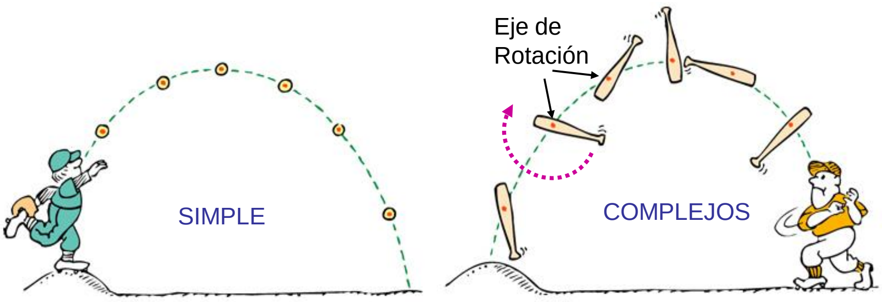
Segunda ley de Newton en la rotación

- En vez de fuerza hablaremos de torque.
- Por lo que la segunda ley de Newton para la rotación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\tau_{neto\ ext} = \sum \tau_{ext} = I\,\alpha$$

Objetos simples y complejos

Movimiento de objetos simples: Posición
Movimiento de objetos complejos: Posición y Rotación



Se simplifica si usamos el centro de gravedad

Centro de masas/centro de gravedad

La posición promedio de toda la masa que forma un objeto se llama centro de masas (CM).

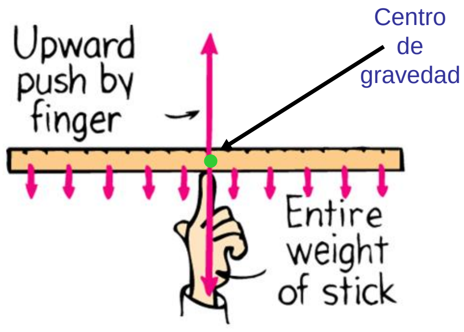
La posición promedio de toda la distribución del peso se llama centro de gravedad (CG).

Cuando la gravedad es constante, el peso y la masa son proporcionales, y los dos centros coinciden.

Por eso normalmente se usan de forma indistinta.

Localizando el centro de gravedad

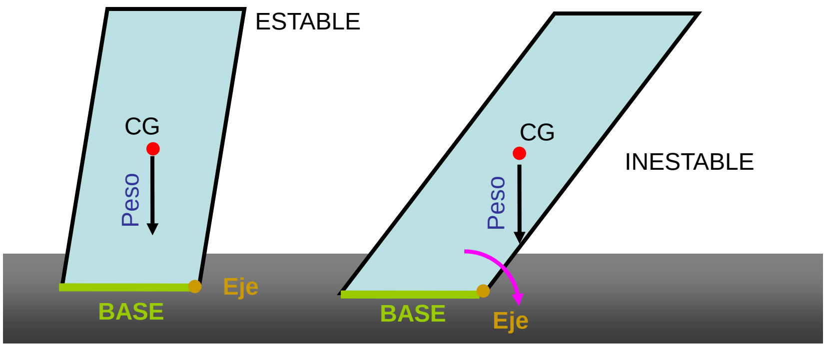
Busca el equilibrio para encontrar el centro de gravedad



El peso de toda la regla se comporta como si estuviera concentrado en su centro

Estabilidad

Un objeto está estable si su CG está sobre la base.



Equilibrio y Ballet

Barra de equilibrio

Se tiende a extender los brazos para gardar el equilibrio por dos razones:

- Aumentar la inercia rotacional para que sea más lenta el cambio de dirección.
- Permitir cambios rápidos del centro de gravedad, para recuperar el equilibrio

Cantidad de movimiento angular o momento angular

Hay dos tipos de momentos:

(Cantidad de movimiento Lineal) = p = m·v

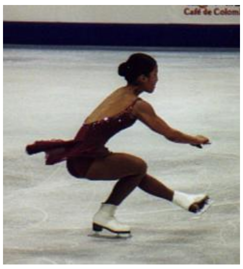
y

(Cantidad de movimiento Angular) = I·ω=
(Momento de Inercia) x (velocidad angular)

Principio de conservación para los dos

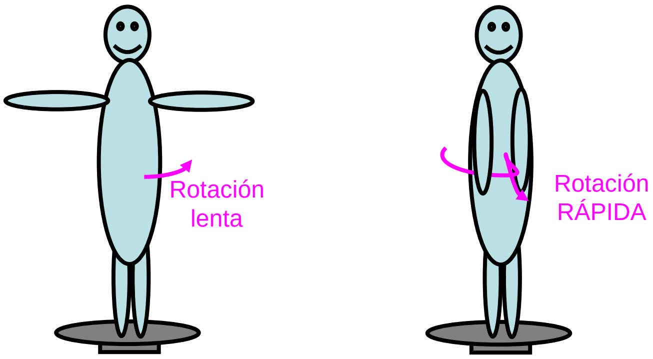
Demo: Skater's Spin

- Juntando los brazos hacia arriba la patinadora puede disminuir la inercia rotacional (momento de inercia) de su cuerpo
- Por la conservación del momento angular, aumenta su velocidad angular (girará más rápido)



Demo: Skater's Spin

Momento de Inercia GRANDE   Momento de Inercia pequeño



El momento angular es constante por lo que
(Momento de Inercia) x (Velocidad Angular) permanece constante.

Analogías de los movimientos rotacional y lineal

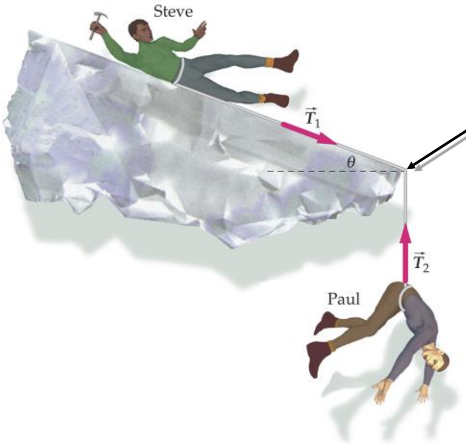
Table 9-2 Analogs in Fixed-Axis Rotational and One-Dimensional Linear Motion

Rotational Motion		Linear Motion	
Angular displacement	$\Delta\theta$	Displacement	Δx
Angular velocity	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Velocity	$v_x = \frac{dx}{dt}$
Angular acceleration	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Acceleration	$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Constant-angular-acceleration equations	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	Constant-acceleration equations	$v_x = v_{0x} + a_x t$
	$\Delta\theta = \omega_{av}\Delta t$		$\Delta x = v_{av\,x}\Delta t$
	$\omega_{av} = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$		$v_{av\,x} = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)$
	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$		$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$
	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\,\Delta\theta$		$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x\,\Delta x$
Torque	τ	Force	F_x
Moment of inertia	I	Mass	m
Work	$dW = \tau\,d\theta$	Work	$dW = F_x\,dx$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Power	$P = \tau\omega$	Power	$P = F_x v_x$
Angular momentum*	$L = I\omega$	Momentum	$p_x = mv_x$
Newton's second law	$\tau_{net} = I\alpha = \frac{dL}{dt}$	Newton's second law	$F_{net\,x} = ma_x = \frac{dp_x}{dt}$

*Angular momentum is introduced in Chapter 10.

Equilibrio: rotación con deslizamiento

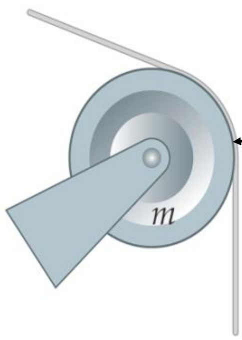
- Polea con un único cuerpo y una cuerda:



La cuerda desliza por la superficie => $T_1=T_2$

Rotación con deslizamiento

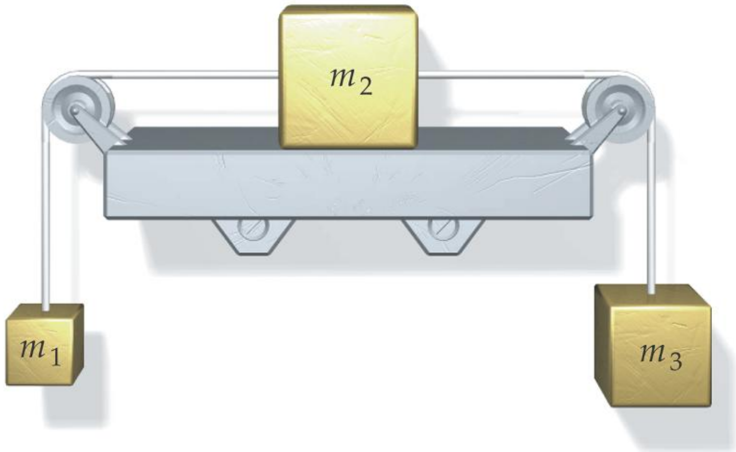
- Si la cuerda en vez de pasar por el borde de un glaciar pasa por una polea que no ejerce rozamiento:



Mismo caso: la cuerda desliza por la superficie => $T_1=T_2$

Ejercicios

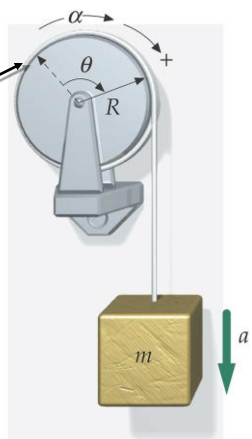
- Ejemplo: Ej. 1 hoja 7.

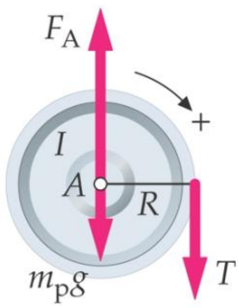


Rotación sin deslizamiento

- Polea con un único cuerpo y una cuerda: Ej. 2 hoja 7

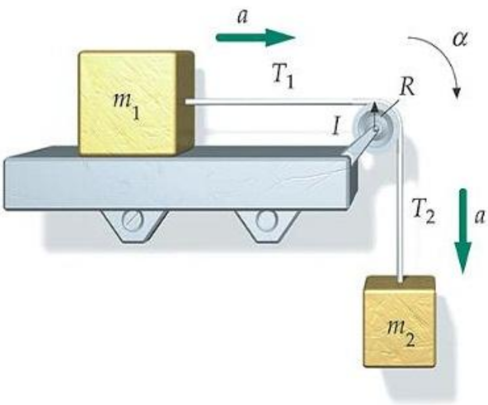
Ojo, la cuerda no desliza por la superficie de la polea.





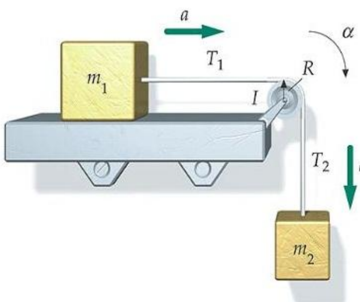
Ejercicios

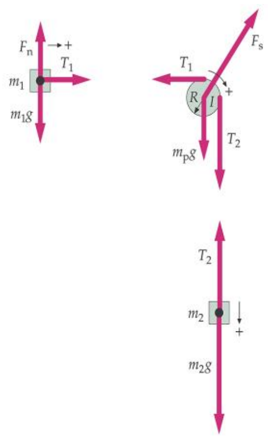
- Dos bloques y una polea: Ej. 3 hoja 7



Ejercicios

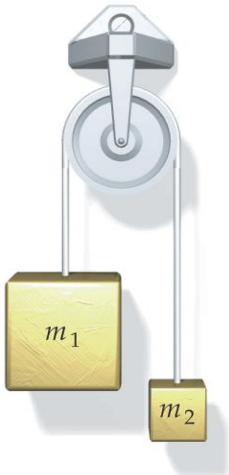
- Dos bloques y una polea





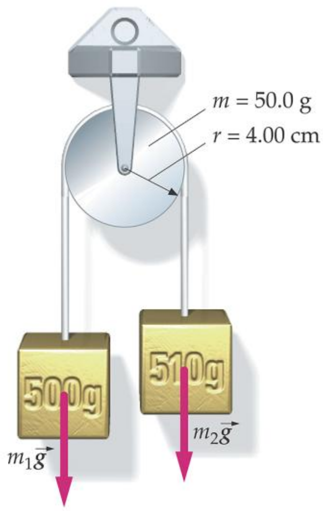
Ejercicios

- Máquina de Artwood (considerando que la cuerda desliza en la polea).



Ejercicios

- Máquina de Artwood (considerando que la cuerda no desliza en la polea)



Cálculo del centro de masas

- Hemos dicho que el movimiento de cualquier cuerpo, por complicada que sea su forma, se produce como si toda su masa estuviera concentrada en su centro de masas.
- ¿Pero cómo calculo la posición de su centro de masas?

Sistemas discretos

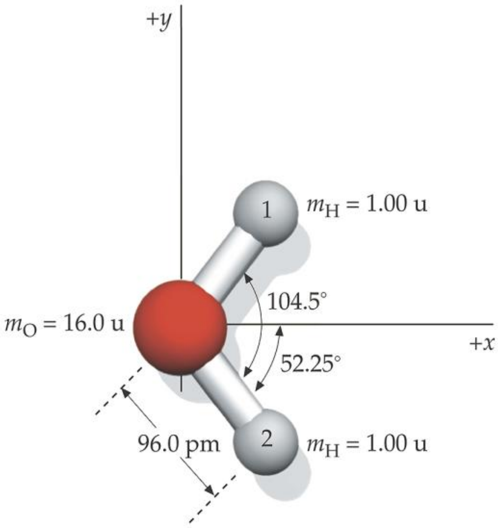
- Si el sistema está formado por un conjunto de partículas (sistema discreto), la posición del centro de masas viene dado por:

$$x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M}$$

- Lo mismo se aplicaría para las coordenadas z e y del cm.

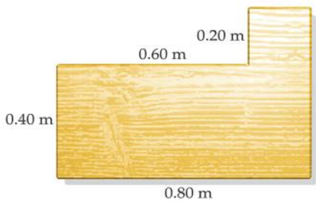
Sistema formado por tres partículas

- Ejemplo. Ejercicio 4 hoja 7.

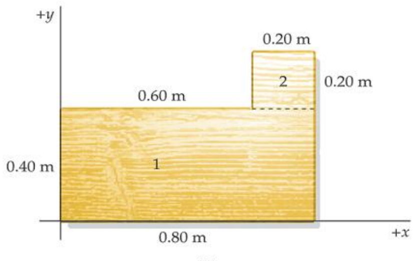


Sistema formado por figuras compuestas

- Ejercicio 5 hoja 7



(a)



(b)

Teoremas de Pappus-Guldin

- Teoremas de Pappus-Guldin:
- Existen dos teoremas que relacionan C.M. con longitudes, superficies y volúmenes.
- Conocidos estos últimos se puede calcular la posición del C.M. sin necesidad de hacer ninguna integral.

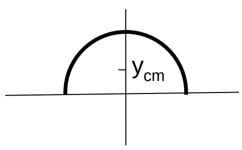
Teoremas de Pappus-Guldin

- Primer teorema: Si tenemos una curva de longitud L y la hacemos girar alrededor de un eje se genera una superficie de revolución de área A.
- Este área, la longitud de la curva y la posición del C.M. de la curva están relacionados por la ecuación:

A = L *(recorrido del C.M. de la curva)

- Ejemplo: C.M. de un alambre semicircular de radio R.

$$4\pi R^2 = \pi R(2\pi y_{cm}) \rightarrow y_{cm} = 2R/\pi$$



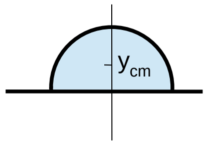
Teoremas de Pappus-Guldin

- Segundo teorema: Si tenemos una placa plana de superficie A y la hacemos girar alrededor de un eje se genera un cuerpo de revolución de volumen V.
- Este volumen, el área de la placa y la posición del C.M. de la placa están relacionados por la ecuación:

A = L *(recorrido del C.M. de la curva)

- Ejemplo: C.M. de un semicírculo de radio R.

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \pi \frac{R^2}{2}(2\pi y_{cm}) \rightarrow y_{cm} = 4R/3\pi$$



Sistema formado por figuras compuestas

- Ejercicio 6 hoja 7

Nebrija Universidad

FÍSICA I | MÓDULO 2

Finalmente dividimos este resultado por la suma de la primera columna, es decir, del área, obteniendo así una de las coordenadas del centroide.

Con la otra coordenada aplicaríamos el mismo método.

a)

Son tres figuras compuestas, dos de ellas con centroides conocidos (el círculo de radio = 10, y el rectángulo de lados 40×20).

El centroide de la tercera figura a sustraer tiene su ordenada en $y = 0$. Luego tan solo nos queda averiguar la componente x.

SUPERFICIE	Area	$\bar{x}$	$M_y = Area \cdot \bar{x}$
Rectángulo	800	20	16000
Círculo	-78,54	10	-785,4
Semicírculo	-157,08	**40-(4r/3π) =** 35,75	-5616,53
Σ	**564,38**		**9598,07**

$$\bar{x} = \frac{\sum M_y}{\sum A} = \frac{9598,07}{564,38} = \mathbf{17,006}$$

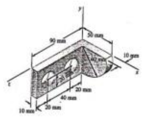
Ejemplo

Nebrija Universidad

FÍSICA I | MÓDULO 2 |
2010 - 2011

Ejercicio 5. Cálculo del centroide o centro de gravedad en pieza de 3 dimensiones.

Localizar el centro de gravedad de la pieza de acero representada. El diámetro de cada orificio es de 20mm y la altura en *y* de la pieza es de 40 mm.



Piezas	Volumen	$\bar{x}$ mm	$\bar{y}$ mm	$\bar{z}$ mm	M_{xy} mm^4	M_{yz} mm^4	M_{zx} mm^4
Pieza en plano *yz*	36000	5	-20	45	162×10^4	180×10^3	-720×10^3
Pieza en plano *xy*	12566,37	26,98	-16,98	5	$62,8\times10^3$	339×10^3	-213,4×10

Bibliografía 6

Nebrija Universidad

FÍSICA I | MÓDULO 2 |
2010 - 2011

Orificio izq.	-3141,59	5	-20	70	-220	$-15,7\times10^3$	$62,83\times10^3$
Orificio der.	-3141,59	5	-20	30	$-94,3\times10^3$	$-15,7\times10^3$	$62,83\times10^3$
Σ	**42283,19**				**$1368,5\times10^3$**	**$487,6\times10^3$**	**-807,74**
Centroide		**11,53**	**-19,1**	**32,36**			

$$\bar{x}=\frac{\sum M_{yz}}{\sum V}=\frac{487600}{42283,19}=11,53 \qquad \bar{y}=\frac{\sum M_{xz}}{\sum V}=1-9,1 \qquad \bar{z}=\frac{\sum M_{xy}}{\sum V}=32,36$$

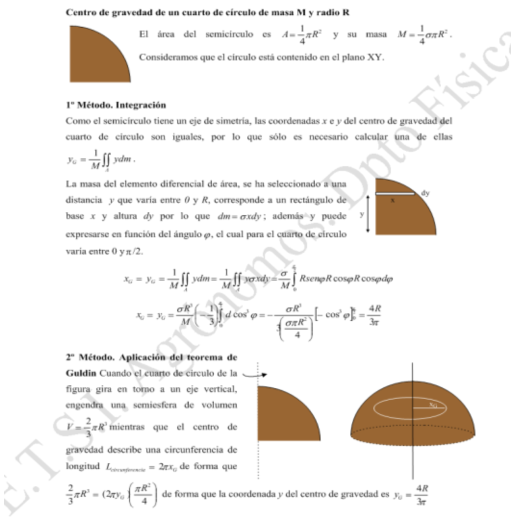
Centro de masas por integración

- Si el sistema es más complejo (varilla, anillo, esfera, cilindro) puedo calcularlo por integración.

$$r_{cm}=\frac{1}{M}\int r\,dm$$

- Notar que es casi como calcular el momento de inercia!

Ejemplo: C.M de un cuarto de círculo



Centro de gravedad de un cuarto de círculo de masa M y radio R

El área del semicírculo es $A = \frac{1}{4}\pi R^2$ y su masa $M = \frac{1}{4}\sigma\pi R^2$.

Consideramos que el círculo está contenido en el plano XY.

1º Método. Integración

Como el semicírculo tiene un eje de simetría, las coordenadas x e y del centro de gravedad del cuarto de círculo son iguales, por lo que sólo es necesario calcular una de ellas $y_G = \frac{1}{M}\iint_A y\,dm$.

La masa del elemento diferencial de área, se ha seleccionado a una distancia y que varía entre 0 y R, corresponde a un rectángulo de base x y altura dy por lo que $dm = \sigma x dy$; además y puede expresarse en función del ángulo φ, el cual para el cuarto de círculo varía entre 0 y $\pi/2$.

$$x_G = y_G = \frac{1}{M}\iint_A y\,dm = \frac{1}{M}\iint_A y\sigma x dy = \frac{\sigma}{M}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\,sen\varphi\, R\cos\varphi\, R\cos\varphi\, d\varphi$$

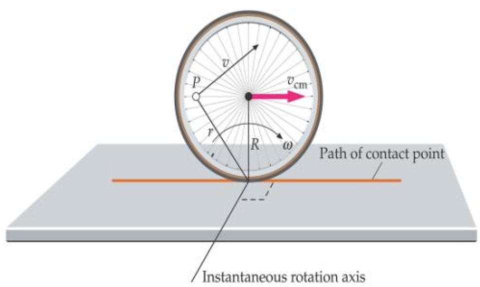
$$x_G = y_G = \frac{\sigma R^3}{M}\left(-\frac{1}{3}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\cos^3\varphi = -\frac{\sigma R^3}{3\left(\frac{\sigma\pi R^2}{4}\right)}\left[-\cos^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4R}{3\pi}$$

2º Método. Aplicación del teorema de Guldin Cuando el cuarto de círculo de la figura gira en torno a un eje vertical, engendra una semiesfera de volumen $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ mientras que el centro de gravedad describe una circunferencia de longitud $L_{circunferencia} = 2\pi x_G$ de forma que

$\frac{2}{3}\pi R^3 = (2\pi y_G)\left(\frac{\pi R^2}{4}\right)$ de forma que la coordenada y del centro de gravedad es $y_G = \frac{4R}{3\pi}$

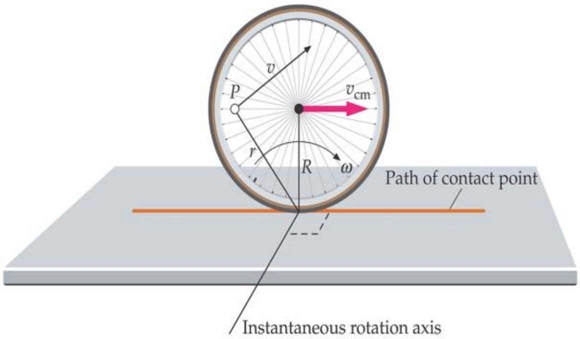
Rodamiento sin deslizamiento

- Movimiento de ruedas, bolas que ruedan…
- El punto P de la rueda se mueve con una velocidad **v=rω,** donde r es la distancia perpendicular desde P al eje de rotación
- El centro de masas se mueve con una velocidad **v_{CM}=Rω_{CM}**



Rodamiento sin deslizamiento

- Ojo! Fijarse cuál es el eje de rotación en el caso de una rueda (ver dibujo)



Rodamiento sin deslizamiento

- ¿Y qué pasa con la energía?
- Si no hay fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva.
- Pero ahora hay una energía cinética de traslación y otra energía cinética de rotación.
- La energía cinética total es:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2$$

- Aparte de la energía potencial, claro.

Rodamiento sin deslizamiento

- Por lo que la energía mecánica será:

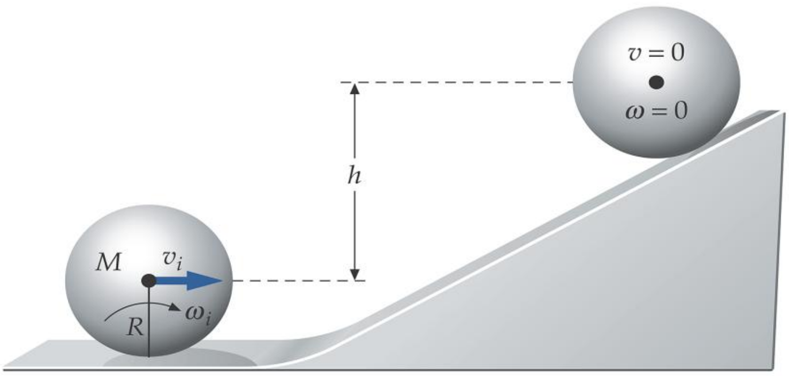
$$E_{mec}=E_c+E_p=\frac{1}{2}Mv_{cm}^2+\frac{1}{2}I_{cm}\omega^2+mgh$$

Rodamiento con deslizamiento

- Si el sólido rígido, además de rodar se desliza, todo se complica un poco más.
- Este caso no lo veremos.

Ejemplo

- Ejercicio 7 hoja 7.



Vídeo

- El universo mecánico – Capítulo 9. El círculo en movimiento
- Parte 1
http://www.youtube.com/watch?v=neRMaE8_mcM&p=D52B7D0336A016D8
- Parte 2
http://www.youtube.com/watch?v=VdhkM1ZHgU8&p=D52B7D0336A016D8